DURÉE : 4 heures

PROBLÈME

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $R^+ = [0, +\infty[$, à valeurs dans R, qui admettent une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

On rappelle qu'une fonction f est positive (noté $f \geqslant 0$) si elle est à valeurs dans R^+ et que f est supérieure à g (noté $f \geqslant g$) si $f - g \geqslant 0$.

Une forme linéaire μ sur $\mathcal{C}$ est positive si :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad f \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(f) \geqslant 0$$

I

1° *a.* Montrer que toute fonction de $\mathcal{C}$ est bornée.

On désigne par $\|f\| = \sup \{ |f(t)| ; t \in R^+ \}$

Peut-on trouver x dans R^+ tel que $|f(x)| = \|f\|$?

b. Montrer que si f est un élément de $\mathcal{C}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \frac{dt}{1+t^2}$ a un sens.

c. Montrer que l'application δ, qui à $f \in \mathcal{C}$ associe

$$\delta(f) = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{dt}{1+t^2}$$

est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}$.

2° Pour $x > 0$, on désigne par e_x la fonction définie sur R^+ par : $e_x(t) = e^{-xt}$,

et on pose : $\tilde{\delta}(x) = \delta(e_x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{dt}{1+t^2}$.

a. Montrer que la fonction $\tilde{\delta}$ est décroissante, positive et tend vers 0 si x tend vers $+\infty$.

b. Établir les inégalités : $\forall x > 0, \forall y > 0, \quad e^{-xy} \operatorname{Arc\,tg} y \leqslant \tilde{\delta}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

En déduire que $\tilde{\delta}(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ si x tend vers zéro.

Tournez la page S. V. P.

c. Montrer que, pour $x > 0$, $t \geqslant 0$ et $h \geqslant -\frac{x}{2}$, on a

$$|e^{-ht} - 1 + ht| \leqslant \frac{h^2 t^2}{2} e^{\frac{x}{2}t}.$$

En déduire que $\tilde{\delta}$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée n-ième $\tilde{\delta}^{(n)}$ est donnée par :

$$\tilde{\delta}^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^n \frac{dt}{1+t^2}.$$

d. En déduire que $\tilde{\delta}$ est solution de l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$:

(E) $\quad y'' + y = \frac{1}{x}$.

3° Soit μ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}$.

a. Montrer que : $\forall f \in \mathcal{C}, \quad |\mu(f)| \leqslant \mu(|f|) \leqslant \|f\| \, \mu(1)$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

b. On pose $\tilde{\mu}(x) = \mu(e_x)$ pour $x > 0$

Vérifier que $\tilde{\mu}$ est une fonction positive, décroissante sur $]0, +\infty[$, majorée par $\mu(1)$.

c. Montrer que $\tilde{\mu}$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée n-ième $\tilde{\mu}^{(n)}$ satisfait à : $(-1)^n \tilde{\mu}^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

4° On pose $d(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$

a. Montrer que $d(x)$ a un sens pour tout $x \geqslant 0$ et que :

$$d(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

b. Montrer que d est un élément de $\mathcal{C}$, qui tend vers 0 à l'infini, et qui vérifie sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) :

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

c. Montrer que l'équation (E) ne peut avoir plus d'une solution qui tend vers 0 à l'infini. En déduire que $\tilde{\delta} = d$ sur $]0, +\infty[$.

d. Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ et $-\operatorname{Log} x$ sont deux fonctions équivalentes quand x tend vers zéro par valeurs supérieures.

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

ENS ST-CLOUD FONTENAY (P') 82

On appelle *fonction complètement monotone* tout élément g de $\mathcal{C}$, indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$, tel que pour tout k de $\mathbb{N}$ $(-1)^k g^{(k)}$ soit positive.

Dans toute cette partie, g désigne une fonction complètement monotone.

1° Vérifier que pour tout $x \geqslant 0$, la fonction e_x est complètement monotone.

Montrer que la fonction $\tilde{\mu}$, définie sur $]0, +\infty[$ en 3° b, est prolongeable en une fonction complètement monotone.

2° Pour $0 < t < a$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n g(a,t) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (a-t)^k$$

a. Montrer par récurrence que :

$$R_n g(a,t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^a (\xi - t)^{n-1} (-1)^n g^{(n)}(\xi)\, d\xi \text{ et que}$$

$$R_n g(a,t) = \frac{(a-t)^n}{(n-1)!} \int_0^1 \zeta^{n-1} (-1)^{(n)} g^{(n)}(t + \zeta(a-t))\, d\zeta$$

b. Pour $0 < u < t < a$, établir les inégalités :

$$0 \leqslant R_n g(a,t) \leqslant \left(\frac{a-t}{a-u}\right)^n R_n g(a,u) \leqslant \left(\frac{a-t}{a-u}\right)^n g(u)$$

c. En déduire que pour $0 < t \leqslant a$,

$$g(t) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^{(k)} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (a-t)^k$$

3° *a.* Montrer que la série de terme général $(-1)^k \frac{g^{(k)}(a)}{k!} a^k$ converge et que sa somme est majorée par $g(0)$.

b. En déduire que $g(0) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{g^{(k)}(a)}{k!} a^k$.

4° Pour $r \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}$, on pose $\mu_r(f) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{g^{(k)}(r)}{k!} r^k f\left(\frac{k}{r}\right)$.

a. Prouver l'existence de $\mu_r(f)$ et montrer que μ_r définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}$.

Tournez la page S. V. P.

b. Déterminer $\mu_r(1)$ et $\mu_r(e_x)$ et vérifier que $\lim_{r \to +\infty} \mu_r(e_x) = g(x)$.

c. On note $\mathcal{P}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par la famille $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ et l'élément 1 ; on admet que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction f de $\mathcal{C}$, on puisse trouver $f_\varepsilon \in \mathcal{P}$ telle que $\| f_\varepsilon - f \| \leqslant \varepsilon$.
Montrer que la suite $(\mu_r(f))_{r \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

d. En déduire que μ définie par $\mu(f) = \lim_{r \to +\infty} \mu_r(f)$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}$ qui vérifie $\tilde{\mu} = g$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail